121. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ ΠΕΡΙΤΤΩΝ

Πέμπτη 23-09-21

Οι απαντήσεις σας πρέπει να είναι πλήρως αιτιολογημένες.

1. (Μόρια 10) Δίνεται ο $n \times n$ πίνακας $A = (a_{i,j})$ με $a_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} = 0, \ j \neq i+1 \\ a_{i,i+1} = 1 \end{cases}$. Να δείξετε ότι $A^n = 0$.

   (Μόρια 5) Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_2[x]$ να εκφράσετε το διάνυσμα x^2 σαν γραμμικό συνδιασμό των $(x+1)^2$, $2x^2+1$ και $3x^2+2x+c$. Εδώ το c δηλώνει το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας.

2. (Μόρια 10) Στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$ θεωρούμε τους υποχώρους

$$V = \{(s-t, cs-t+u, s-t, t-u) | s,t,u \in \mathbb{R}\}$$

   και

$$W = \{(x,y,z,w) | x-y+z-w=0\}.$$

   Να προσδιοριστούν βάσεις και οι διαστάσεις των υποχώρων $V, W, V \cap W$ και $V+W$. Βρείτε έναν υποχώρο V' τέτοιο ώστε $\mathbb{R}^4 = V \oplus V'$ και έναν υποχώρο W' τέτοιο ώστε $\mathbb{R}^4 = W \oplus W'$. Πόσες επιλογές υπάρχουν· Δικαιολογήστε. Εδώ το c δηλώνει το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας.

3. (Μόρια 10) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -c & 4 \\ -3 & 2 & 1 & -c \end{pmatrix}$. Να βρεθούν πίνακες P και Q ώστε $PAQ = \begin{pmatrix} I_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Οι πίνακες P και Q να εκφρασθούν ως γινόμενα στοιχειωδών πινάκων. Εδώ το c δηλώνει το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας.

4. (Μόρια 15) Δίνεται οτι ο πίνακας $A_{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος. Να δείξετε ότι $rank(A_{n\times n}B_{n\times m}) = rank B_{n\times m}$.

5. (Μόρια 10) Εξετάστε αν υπάρχουν πραγματικοί r και s ώστε το σύστημα

$$\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & (r-2)(s-1) & c \\ 0 & s-1 & r+2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 2 \\ 4 \\ c \end{pmatrix}$$

   να έχει άπειρες λύσεις και από πόσες μεταβλητές εξαρτάται. Εδώ το c δηλώνει το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας.

(Θέμα 6 και 7 βρίσκονται στην πίσω σελίδα.)

6. (Μόρια 10) Να υπολογιστεί η ορίζουσα του παρακάτω πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} (a+5) & (a+5) & 0 & 0 & 0 \\ 3(a+5) & 4(a+5) & (a+5) & 0 & 0 \\ 0 & 3(a+5) & 4(a+5) & (a+5) & 0 \\ 0 & 0 & 3(a+5) & 4(a+5) & (a+5) \\ 0 & 0 & 0 & 3(a+5) & 4(a+5) \end{pmatrix}.$$

Εδώ το a δηλώνει το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας.

7. (Μόρια 30) Θεωρούμε τον ενδομορφισμό: $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που ορίζεται ώς εξής

$$T(x, y, z) = (cx + ay + z, cx + y + az, y + z).$$

Βρείτε όλα τα $a \in \mathbb{R}$ ώστε η διάσταση του πυρήνα του T να είναι 1. Για τις συγκεκριμένες τιμές του a που βρήκατε να υπολογιστούν:

(α′) μια βάση του πυρήνα και μια βάση της εικόνας του T,

(β′) ο πίνακας A του T στη βάση α= $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, c))$ του $\mathbb{R}^3$,

(γ′) ο πίνακας B του T στη βάση β= $((1, 1, -1), (1, -1, 0), (-c, 0, 0))$ του $\mathbb{R}^3$,

(δ′) ένας αντιστρέψιμος 3×3 πίνακας P έτσι ώστε

$$B = P^{-1}AP.$$

Εδώ το c δηλώνει το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ